Fonctions de transfert : forme canonique, forme pôles/zéros, réponse en fréquence

1 Introduction

Durant le cours d'électronique appliquée, des associations entre les pôles et des fréquences de coupures sont régulièrement faites. Cette partie de cours a pour but de faire le point sur les liens entre pôles et fréquences caractéristiques des diagrammes de Bode, en débutant par des rappels sur les fonctions de transfert (FT) continues et la transformée de Laplace.

À partir de la section 4, seuls les filtres passe-bas seront discutés. La théorie présentée sera toutefois applicable aux filtres passe-bande et passe-haut, en rajoutant au numérateur des FT évoquées les zéros nécessaires.

2 Fonction de transfert d'un circuit électrique linéaire réel

À partir d'un circuit électrique linéaire, on sait qu'on peut utiliser les impédances complexes des composants pour obtenir une FT dans le domaine de Laplace, avec $p = j\omega$. En appliquant les lois des nœuds et des mailles, on obtient le plus souvent une FT rationnelle sous la *forme canonique* (forme développée) :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = H_0 \frac{1 + b_1p^1 + b_2p^2 + \cdots + b_mp^m}{1 + a_1p^1 + a_2p^2 + \cdots + a_np^n} \qquad (1)$$

Les notations employées sont les suivantes :

$$\begin{cases} p \text{ est la variable de Laplace} \\ X = TL(x) \text{ est la transformée de Laplace de l'entrée } x \text{ (courant ou tension) du système électrique} \\ Y = TL(y) \text{ est la transformée de Laplace de la sortie } y \text{ (courant ou tension) du système électrique} \\ H_0 \in \mathbb{C} \text{ est le gain statique du système} \end{cases}$$

L'entrée et la sortie sont des grandeurs physiques, et sont donc des fonctions réelles. On les suppose continues et dérivables n fois pour y, m fois pour x. On note :

$$\begin{cases} x \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}) \\ y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on va maintenant supposer que $H_0 = 1$.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$$(1 + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_np^n)Y(p) = (1 + b_1p + b_2p^2 + \cdots + b_mp^m)X(p) \qquad (2)$$

Or, on rappelle que la dérivation temporelle a la propriété suivante en transformée de Laplace :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \qquad [TL(f')](p) = p[TL(f)](p) - f(0^-)$$

Si les conditions initiales sont nulles (c'est-à-dire si les fonctions x, y, ainsi que toutes leurs dérivées nulles en $t = 0$), la multiplication par p correspond à un opérateur de dérivation. L'équation (2) devient donc :

$$y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) + \cdots + a_n y^{(n)}(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) + \cdots + b_m x^{(m)}(t) \qquad (3)$$

Or, cette équation est vraie pour toutes les fonctions $x \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ et $y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ à conditions initiales nulles. Ces fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on en déduit alors que :

$$\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \\ b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (4)$$

Les coefficients de la forme canonique de la FT sont donc des nombres réels et non pas des nombres complexes.

Remarque : l'équation différentielle (3) est en fait celle que l'on aurait obtenu en utilisant les équations des condensateurs, inductances, etc., sous forme différentielle, au lieu d'utiliser les impédances complexes. Les coefficients sont donc composés de C, L, R, g_m, etc., et sont donc bien réels en pratique.

3 Factorisation et forme pôles/zéros

Parmi les nombreuses propriétés des polynômes, on sait que tout polynôme complexe d'ordre n possède n racines complexes, et est donc factorisable en n polynômes d'ordre 1. On sait donc que la FT de l'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{C} \qquad (5)$$

$$= K \frac{z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n} \frac{\left(\frac{p}{z_1} - 1\right)\left(\frac{p}{z_2} - 1\right) \dots \left(\frac{p}{z_m} - 1\right)}{\left(\frac{p}{p_1} - 1\right)\left(\frac{p}{p_2} - 1\right) \dots \left(\frac{p}{p_n} - 1\right)}$$

$$= \underbrace{K \frac{(-1)^m z_1 z_2 \dots z_m}{(-1)^n p_1 p_2 \dots p_n}}_{= H_0} \frac{\left(1 - \frac{p}{z_1}\right)\left(1 - \frac{p}{z_2}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{z_m}\right)}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(1 - \frac{p}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{p_n}\right)} \qquad (5\ bis)$$

Les équations (5) et (5 bis) présentent la FT sous forme factorisée, ou *forme pôles/zéros*. Cette forme facilite l'interprétation de la fonction de transfert et la compréhension du comportement dynamique du circuit étudié.

Remarque : chaque capacité ou inductance d'un circuit électronique peut faire augmenter l'ordre du numérateur et/ou du dénominateur de la FT. Un circuit à transistor bipolaire étudié à hautes fréquences contiendra par exemple 3 ou 4 capacités intrinsèques, et 2 ou 3 capacités de liaison. La factorisation de polynômes d'ordre élevé étant un problème d'analyse assez complexe, elle sera souvent en pratique réalisée dans un logiciel de calcul.

4 Décomposition d'une fonction de transfert d'ordre élevé

À partir de cette section 4, la FT considérée aura uniquement un comportement passe-bas, avec gain unitaire dans la bande passante. Les développements présentés ci-dessous sont applicables facilement aux zéros de la FT de l'équation (1). On notera donc à présent :

$$H_{PB}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + a_1 p^1 + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = \frac{1}{Den(p)} \qquad (6)$$

Puisque les coefficients du polynôme $Den(p)$ au dénominateur sont tous réels, on connaît plus précisément la nature des racines qui sont les pôles de la FT. On sait en particulier que ces racines du polynôme $Den(p)$ sont soit des nombres réels, soit des nombres complexes conjugués. On pourra donc écrire :

$$H_{PB}(p) = \prod_{i=1}^{A} \frac{1}{1 - p/p_i} \prod_{k=1}^{B} \frac{1}{1 - p/p_k} \frac{1}{1 - p/\overline{p_k}} \qquad (7)$$

Avec :

$$\begin{cases} A + 2B = n \\ \forall i \in [\![1; A]\!], \quad p_i \in \mathbb{R} \\ \forall k \in [\![1; B]\!], \quad p_k \in \mathbb{C} \end{cases}$$

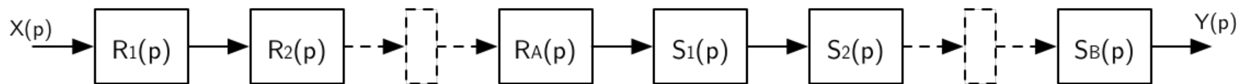
On remarque dans l'équation (7) que $H_{PB}(p)$ peut être vue comme un produit de FT d'ordre 1 et de FT d'ordre 2. Si on note :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1; A]\!], \quad R_i(p) = \dfrac{1}{1 - p/p_i} \\ \forall k \in [\![1; B]\!], \quad S_k(p) = \dfrac{1}{1 - p/p_k} \dfrac{1}{1 - p/\overline{p_k}} \end{cases}$$

Alors on peut écrire $H_{PB}(p)$ comme suit :

$$H_{PB}(p) = R_1(p) R_2(p) \ldots R_A(p) S_1(p) S_2(p) \ldots S_B(p) \qquad (8)$$

On peut donc voir la FT d'ordre élevé $H_{PB}(p)$ comme la mise en série (en cascade) de fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 et 2. Le schéma-bloc correspondant pourrait être :



Ces fonctions de transferts $R_i(p)$ et $S_k(p)$ peuvent être étudiées de manière indépendante, et seront évoquées dans les sous-sections 5.1 et 5.2.

<u>Remarque</u> : on pourrait décomposer les zéros (le polynôme au numérateur) de l'équation (1) de la même manière que les pôles, en plusieurs FT élémentaires d'ordre 1 ou 2 avec des zéros réels ou complexes conjugués.

5 Pôles et fréquences de cassure associées

5.1 Pôle réel p_i (FT d'ordre 1)

Soit $i \in [\![1;A]\!]$. On s'intéresse ici à la réponse en fréquence de la fonction $R_i(p)$ de l'équation (8). On peut écrire :

$$R_i(p) = \frac{1}{1 - p/p_i} = \frac{1}{1 + \tau_i p}$$

L'unité de τ_i est la seconde.

On ne travaillera qu'avec des systèmes stables, or on sait que la CNS de stabilité pour un système continu est que la partie réelle de tous les pôles soit négative. Or $p_i \in \mathbb{R}$, donc $p_i < 0$, ce qui donne bien :

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i} > 0$$

On connaît la forme du diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 1, avec bande passante et bande atténuée à -20dB/décade. On sait également que τ_i est une constante de temps qui permet de calculer la fréquence de cassure $f_{c,i}$, qui est aussi la fréquence de coupure à -3dB. Le lien entre pôle réel, constante de temps et fréquence de cassure associée est :

$$f_{c,i} = \frac{1}{2\pi\tau_i} = \frac{|p_i|}{2\pi}$$
$$\omega_{c,i} = |p_i|$$

5.2 Pôles complexes conjugués p_k et $\overline{p_k}$ (FT d'ordre 2)

Soit $k \in [\![1;B]\!]$. On s'intéresse ici à la réponse en fréquence de la fonction $S_k(p)$ de l'équation (8). Les fonctions passe-bas d'ordre sont bien connues, et on sait qu'on peut écrire pour toute fonction de transfert à coefficients réels :

$$S_k(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{Q\omega_{c,k}} + \frac{p^2}{\omega_{c,k}^2}} \qquad (9)$$

Avec $\omega_{c,k}$ que l'on interprète comme la pulsation de cassure (avant la coupure à -40dB/décade), et Q que l'on interprète comme le *facteur de qualité*. Pour calculer ces valeurs en fonction des pôles, on reprend la définition de $S_k(p)$:

$$S_k(p) = \frac{1}{1 - p/p_k}\frac{1}{1 - p/\overline{p_k}}$$
$$= \frac{1}{1 + p\left(\frac{-1}{p_k} - \frac{1}{\overline{p_k}}\right) + \frac{p^2}{p_k\overline{p_k}}}$$

Par identification terme à terme, on obtient :

$$\begin{cases} \omega_{c,k}^2 = p_k\overline{p_k} = |p_k|^2 \\ \frac{1}{Q\omega_{c,k}} = \frac{-1}{p_k} - \frac{1}{\overline{p_k}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_{c,k} = |p_k| \\ \dfrac{\omega_{c,k}}{Q} = -p_k - \overline{p_k} \end{cases} \qquad (10)$$

Remarque : la formule $\omega_{c,k} = |p_k|$ de la fréquence de cassure en fonction du module d'un pôle est donc valable pour les pôles simples, aussi bien que pour les pôles complexes conjugués.

On note $p_k = \alpha + j\beta$. On peut alors exprimer le facteur de qualité en fonction des pôles :

$$\frac{\omega_{c,k}}{Q} = -p_k - \overline{p_k} = -2\alpha$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{\omega_{c,k}}{2\alpha}$$

Remarque : si les pôles $p_k, \overline{p_k}$ étaient en fait réels, c'est qu'il s'agissait d'un même pôle double $p_k = \overline{p_k}$. On aurait alors pu appliquer les calculs de la sous-section 5.1 pour un pôle réel de système d'ordre 1.

On peut néanmoins considérer ces deux pôles $p_k, \overline{p_k}$ avec $p_k = \overline{p_k}$ comme constituant un système passe-bas d'ordre 2, plutôt que les considérer comme deux pôles isolés. Le facteur de qualité vaut alors, pour ce système passe-bas d'ordre 2 :

$$Q = -\frac{\omega_{c,k}}{2\alpha} = -\frac{|p_k|}{2\alpha} = -\frac{|\alpha|}{2\alpha} = +\frac{1}{2} \quad \text{car } \alpha < 0 \text{ (système stable)}$$

Cette valeur de $Q = 1/2$, très particulière, correspond à la valeur seuil entre les systèmes résonnants et les systèmes amortis (voir section 6 suivante).

6 Passe-bas ordre 2 : facteur de qualité Q et résonnance

On considère dans cette section un filtre passe-bas d'ordre 2, tel que :

$$S(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{Q\omega_c} + \frac{p^2}{\omega_c^2}}$$

On sait que ce système est factorisable sous la forme pôles(/zéros) d'ordre 2 :

$$S(p) = \frac{1}{1 - p/p_1}\frac{1}{1 - p/p_2}$$

$$= \frac{1}{1 + p\left(\frac{-1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) + \frac{p^2}{p_1 p_2}}$$

Par identification terme à terme, on a donc le système d'équations :

$$\begin{cases} \omega_c^2 = p_1 p_2 \\ \dfrac{1}{Q\omega_c} = \dfrac{-1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} \end{cases} \qquad (11)$$

6.1 Tableau résumé

Parmi les résultats de l'étude des filtres passe-bas d'ordre 2, on reprend dans le tableau ci-dessous la catégorisation des types de filtres selon la valeur du facteur de qualité Q. On rappelle qu'on peut également exprimer l'équation (9) selon le *facteur d'amortissement* $\xi = \frac{1}{2Q}$.

Q	$\xi = \frac{1}{2Q}$	Type de filtre	Type de pôles
$\to +\infty$	$\to 0$	Résonnant (oscillant) à la limite de stabilité	Imaginaires purs
$> 1/2$	< 1	Résonnant (oscillant) avec amortissement	Complexes conjugués
$1/2$	1	Critique	Égaux (pôle double)
$< 1/2$	> 1	Amorti sans oscillations	Pôles réels distincts

On va démontrer ci-dessous les liens entre types de pôles et le type du filtre obtenu.

6.2 Pôle double $p_1 = p_2 \in \mathbb{R}$

Ce cas a été étudié en sous-section 5.2 : le facteur de qualité vaut précisément $Q = 1/2$.

6.3 Pôles réels distincts : $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ avec $p_1 \neq p_2$

Le système d'équations (11) devient, pour des pôles réels :

$$\begin{cases} \omega_c = \sqrt{p_1 p_2} \\ Q = \dfrac{-\omega_c}{p_1 + p_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{-\sqrt{p_1 p_2}}{p_1 + p_2} = \frac{\sqrt{|p_1||p_2|}}{|p_1| + |p_2|} = \frac{\sqrt{|p_1|}\sqrt{|p_2|}}{|p_1| + |p_2|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{|p_1|}{|p_2|}} + \sqrt{\frac{|p_2|}{|p_1|}}}$$

Soit $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $|p_2| = \gamma |p_1|$. On peut alors exprimer Q en fonction de γ uniquement :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma}} + \sqrt{\gamma}} = \frac{1}{f(\gamma)}$$

Le tableau des variations de la fonction f n'est pas précisé ici, mais on peut démontrer qu'elle admet sur $\mathbb{R}^+$ un minimum en $\gamma = 1$ de valeur $f(1) = 2$. Ce minimum correspond au cas « pôle double » $p_1 = p_2$, et n'est donc pas considéré. Donc :

$$Q < \frac{1}{2}$$

6.4 Cas général : pôles complexes conjugués $p_1 = \overline{p_2} \in \mathbb{C}$

Dans ce cas, en utilisant la notation $p_1 = \alpha + j\beta$ avec $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$, le système d'équations (11) devient :

$$\begin{cases} \omega_c^2 = p_1\overline{p_1} = |p_1|^2 = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 = \alpha^2+\beta^2 \\ \dfrac{1}{Q\omega_c} = \dfrac{-1}{p_1} - \dfrac{1}{\overline{p_1}} \end{cases}$$

D'où :

$$Q = \frac{\omega_C}{-p_1 - \overline{p_1}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{-\alpha - j\beta - \alpha + j\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{-2\alpha} \underbrace{>}_{car\ \beta\neq 0} \frac{\sqrt{\alpha^2}}{-2\alpha} = \frac{|\alpha|}{-2\alpha} = \frac{-\alpha}{-2\alpha} = +\frac{1}{2}$$

Si les pôles sont complexes conjugués à partie imaginaire non-nulle, on a alors bien un système résonnant avec un facteur de qualité $Q > 1/2$.

7 Passe-bas ordre 2 : diagrammes de Bode selon Q

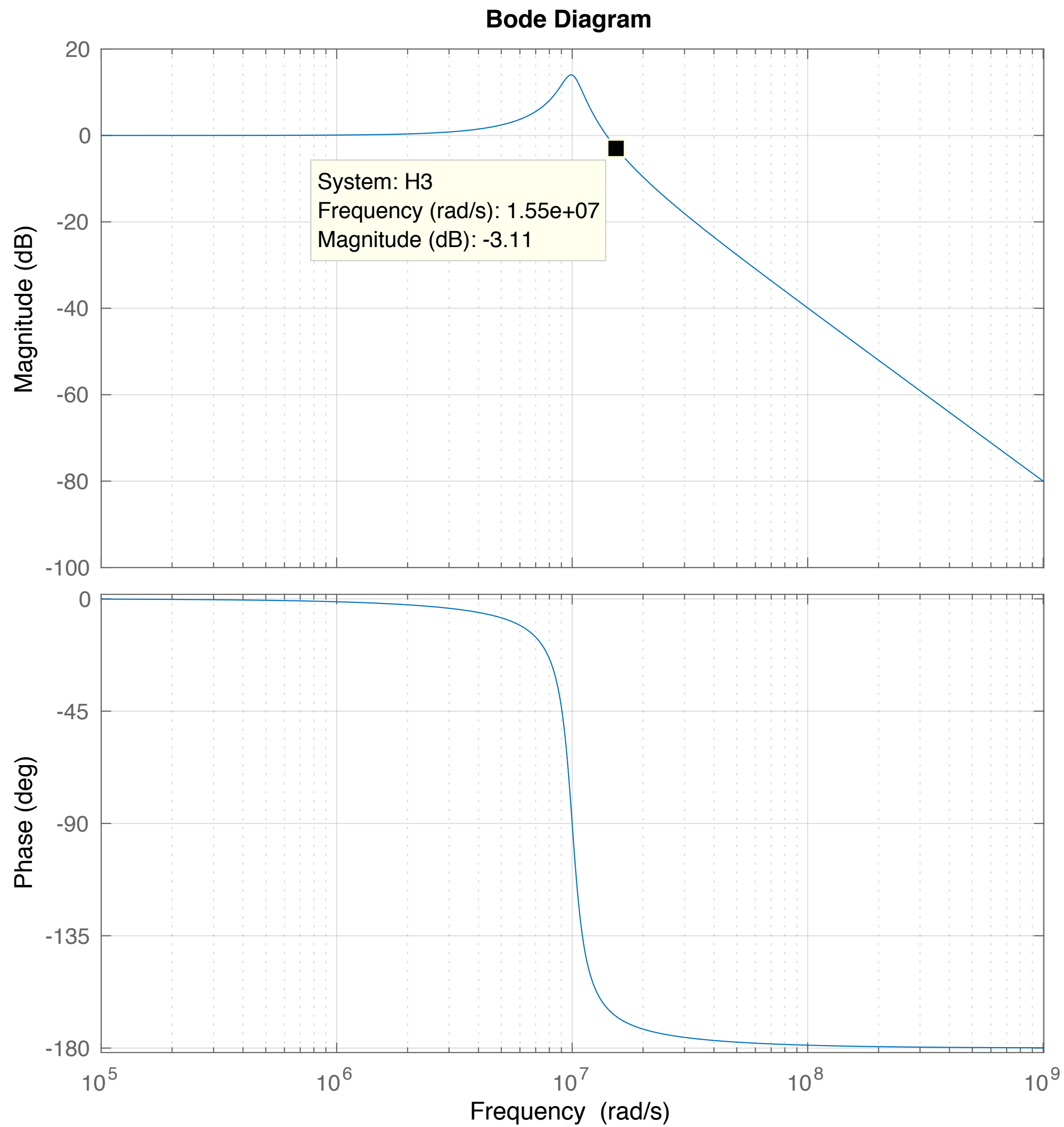
Dans cette partie, on considère la FT ci-dessous, pour $\omega_c = 10^7 rad/s$:

$$S(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{Q\omega_c} + \frac{p^2}{\omega_c^2}}$$

On va noter ω_h la *pulsation de coupure* à -3dB, qui est ici une pulsation de coupure haute. Cette pulsation est fréquemment confondue avec la pulsation de cassure ω_c, ce qui n'est pas toujours juste. Pour une FT d'ordre 2, on aura en général $\omega_c \neq \omega_h$ comme illustré ci-après.

Remarque : la FT $S(p)$ est à gain statique unitaire, ce qui n'est pas le cas des FT d'amplificateurs à transistors du cours d'électronique appliquée. Dans le cas d'un fort gain statique, on note ω_T la pulsation de transition telle que $S(j\omega_T) = 0dB$, à partir de laquelle le système devient atténuateur. On aura alors également $\omega_T \neq \omega_h$ et $\omega_T \neq \omega_c$.

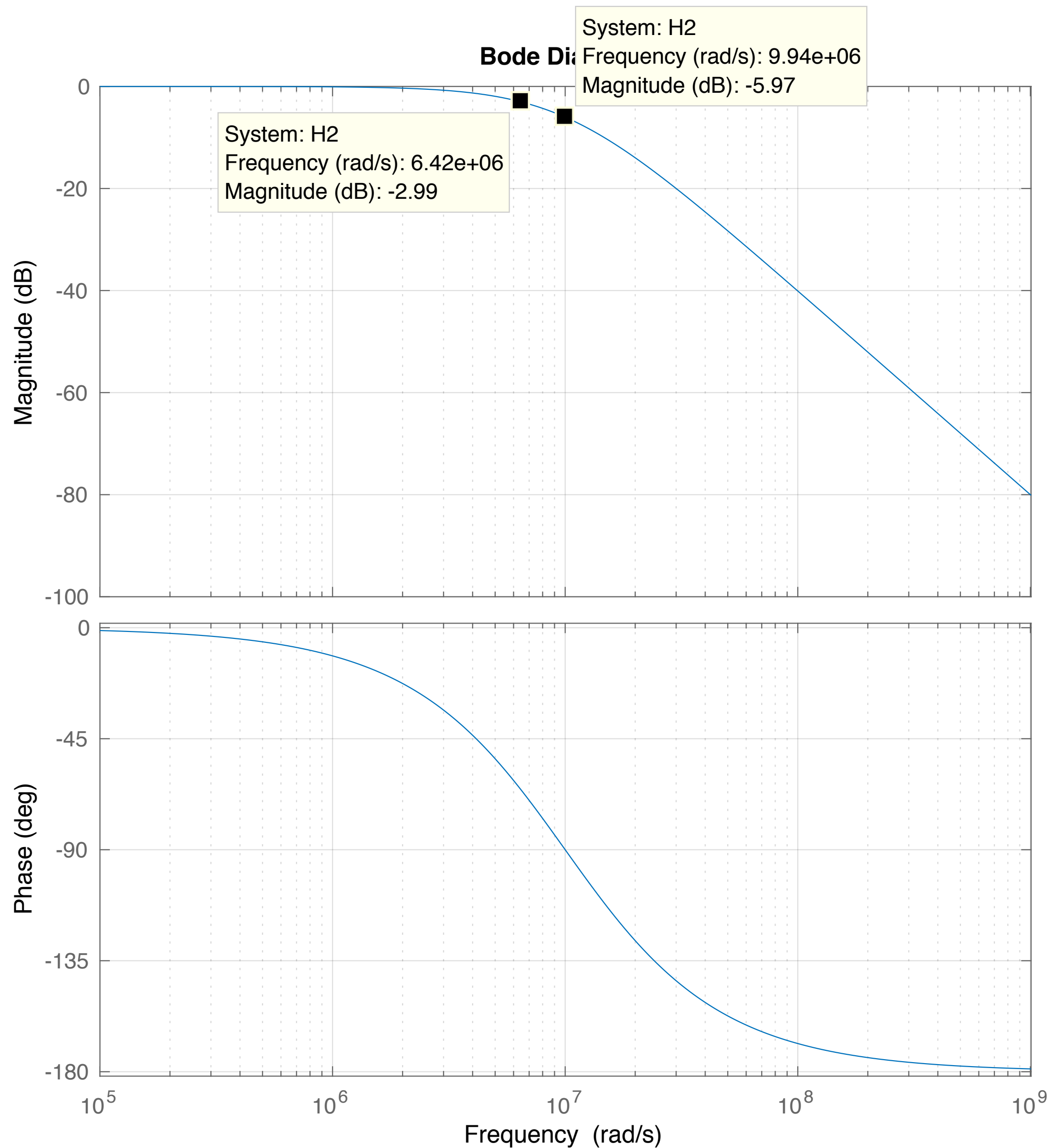
7.1 Système résonnant, $Q \gg 1/2$



On mesure une pulsation de coupure à -3dB de $\omega_h \approx 1{,}5.10^7 rad/s$. On a donc $\omega_h > \omega_c \approx 10^7 rad/s$.

La résonnance décale l'entrée dans la bande atténuée vers de plus hautes fréquences.

7.2 Système critique, $Q = 1/2$

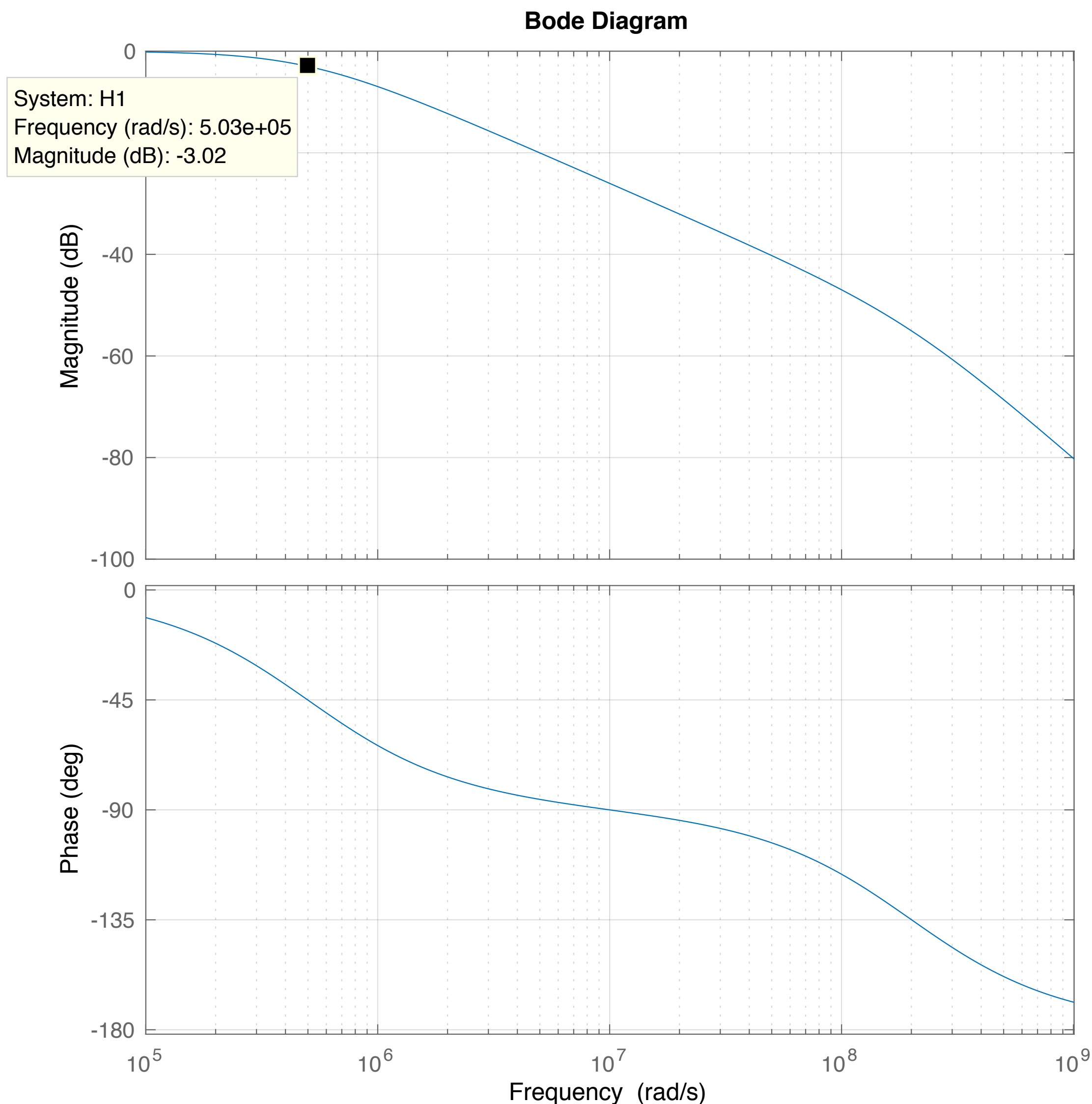


On mesure une pulsation de coupure à -3dB de $\omega_h \approx 6{,}5.10^6 rad/s$. On a donc $\omega_h < \omega_c \approx 10^7 rad/s$.

Remarque : à ω_c, on constate une atténuation de -6dB, ce qui correspond à l'atténuation -3dB cumulée des deux pôles identiques $p_1 = p_2 = -\omega_c$ à leur pulsation de coupure.

Remarque : de manière générale, c'est lorsque Q est légèrement supérieur à $1/2$ que l'on pourra faire l'approximation $\omega_c \approx \omega_h$.

7.3 Système amorti, $Q \ll 1/2$



On mesure une pulsation de coupure à -3dB de $\omega_h \approx 5.10^5 rad/s$. On a donc $\omega_h \ll \omega_c \approx 10^7 rad/s$.

On constate bien dans ce cas l'existence de deux pôles réels distincts $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. On observe une première décroissance d'ordre à -20dB/décade à partir d'une pulsation $\omega_1 = -p_1 \approx 5.10^5 rad/s$, correspondant à un premier filtre passe-bas d'ordre 1. On observe ensuite à partir d'une pulsation $\omega_2 = -p_2 \approx 2.10^8 rad/s$ une décroissance de -40dB, correspondant à un second filtre passe d'ordre 1.

Remarque : ces deux filtres d'ordre 1 ont un comportement indépendant et pourraient être étudiés séparément.

8 Notations particulières dans le cours « Électronique Appliquée »

La partie « 3 – approximation par le pôle dominant » présente une approche basée sur des pôles réels. Si on note q_i ces pôles, on a pour un système stable $q_i = -|q_i|$. On notera alors, pour simplifier les écritures, $p_i = -q_i \in \mathbb{R}^+$.

L'équation (7) ne sera pas celle utilisée dans cette partie « 3 » du cours. On notera plutôt :

$$H_{PB}(p) = \prod_{i=1}^{A} \frac{1}{1 - p/q_i} = \prod_{i=1}^{A} \frac{1}{1 + p/p_i}$$